

Ergänzung zum schulinternen Lehrplan – Dokumentation der Nutzung von GeoGebra

Die Nutzung von GeoGebra im zweiten Prüfungsteil verkürzt den Rechenaufwand enorm. Dies erscheint manchmal befremdlich, man fragt sich vielleicht, wo die mathematischen Kompetenzen des Prüflings liegen. Letztlich sind aber einerseits die Nutzung von GeoGebra, andererseits das Erkennen der Lösungsmöglichkeiten und Lösungswege aber auch nachgewiesene mathematische Kompetenzen. Das „klassische Berechnen“ (z. B. Gleichungen lösen usw.) sind Kompetenzen, die nur im ersten Prüfungsteil ohne Hilfsmittel von Hand durchzuführen sind.

Der Dokumentation im Teil mit Hilfsmitteln kommt durch die hohen Nutzungsmöglichkeiten von GeoGebra damit aber eine große Bedeutung zu.

Grundsätzlich gilt:

Lösungswege müssen dokumentiert werden. Die Angabe von Befehlen o.ä. ist KEINE Dokumentation. Das reine Angeben von Ergebnissen ist ausschließlich beim Operator „angeben“ eine adäquate Lösung, bei anderen Operatoren führt die bloße Angabe des Ergebnisses zu keinen Punkten.

Die nachfolgend angeführten Dokumentationen sind vollauf korrekt, ausreichend und erfordern die Vergabe der maximalen Punktzahl.

Es gilt stets: Eine rechnerische Lösung (Operatoren „Berechnen“ bzw. „rechnerisch Bestimmen“) ist immer auch eine vollwertige Lösung bei den Operatoren „Ermitteln“ bzw. „Bestimmen“ (andersherum gilt dies aber natürlich nicht!).

„Berechnen“ bzw. „rechnerisch Bestimmen“ erfordert immer die rechnerischen Ansätze bei allen einzelnen Lösungsschritten, Argumentationen über die Anschauungen sind an keiner Stelle gestattet (so muss z.B. auch bei gesuchten y-Werten der rechnerische Ansatz $f(\dots)=\dots$ notiert sein und es kann nicht einfach ein Punkt angegeben werden) – damit darf (theoretisch) die Graphik-Ansicht hierbei nicht verwendet werden.

„Bestimmen“ bzw. „Ermitteln“ erfordert eine durchweg nachvollziehbare Dokumentation aller Lösungsschritte. Wenn die Graphik-Ansicht genutzt wurde (nicht nur zulässig, sondern ausdrücklich gewünscht), so muss dies z.B. über die Formulierung „mittels graphischer Analyse“ angezeigt werden.

Rundungen und exakte Lösungen:

Bei den Operatoren „rechnerisch bestimmen“, „berechnen“, ... werden in der Regel keine exakten Werte erwartet, wenn dies nicht anders aus der Aufgabenstellung hervorgeht.

Bei den Operatoren „nachweisen“ oder „zeigen“ werden dann exakte Werte erwartet, wenn dies aus dem geforderten Nachweis hervorgeht.

Grundsätzlich gilt: Die im Unterricht etablierten Konventionen gelten: Die Lehrkraft entscheidet, ob z.B. $x = \pm\sqrt{2}$ als Lösungen von $x^2 = 2$ erwartet wird oder $x \approx \pm 1,41$ ausreicht.

Beispiel 1 - Analysis

$$f(x) = -\frac{1}{10}x^5 + 2x^4 - x^3 + 1$$

- a) OPERATOR die Nullstellen der Funktion. b) OPERATOR die Extrempunkte der Funktion.
c) OPERATOR die Wendepunkte der Funktion.

Beim Operator „ANGEBEN“

- a) Nullstelle: $x \approx 19,49$
b) lokaler Hochpunkt: $H(15,62 | 22263)$, lokaler Tiefpunkt: $T(0,38 | 0,99)$
c) Wendepunkte: $W_1(0 | 1)$; $W_2(0,26 | 0,99)$; $W_3(11,74 | 14074)$

	Operatoren „ERMITTELN“ oder „BESTIMMEN“	Operatoren „Berechnen“ oder „rechnerisch Bestimmen“
a)	$f(x) = 0$, GG liefert als Lösung: $x \approx 19,49$ [Alternative: Mittels graphischer Analyse ergibt sich $x \approx 19,49$]	$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{10}x^5 + 2x^4 - x^3 + 1 = 0$, GG liefert als Lösung: $x \approx 19,49$
b)	Gesucht sind die lokalen Extrempunkte von f. Mittels graphischer Analyse ergibt sich als lokaler Hochpunkt: $H(15,62 22263)$ Mittels graphischer Analyse ergibt sich als lokaler Tiefpunkt: $T(0,38 0,99)$	Gesucht sind die lokalen Extrempunkte von f. $f'(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 8x^3 - 3x^2$; $f''(x) = -2x^3 + 24x^2 - 6x$ notw. Bed. $f'(x) = 0$ $0 = -\frac{1}{2}x^4 + 8x^3 - 3x^2$ mit GG: $x_1 \approx 0,38$ und $x_2 \approx 15,62$ hinr. Bed. $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$ $f''(0,38) \approx 1,08 > 0 \rightarrow T$ $f''(15,62) \approx -1860 < 0 \rightarrow H$ da $f(0,38) \approx 0,99$ folgt: $T(0,38 0,99)$ da $f(15,62) \approx 22263$ folgt: $H(15,62 22263)$
c)	Die Wendestellen von f entsprechen den lokalen Extrempunkten von f'. Für f' gilt: $f'(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 8x^3 - 3x^2$. Über eine graphische Analyse ergeben sich als lokale Extrempunkte und damit als Wendepunkte von f: $W_1(0 1)$; $W_2(0,26 0,99)$; $W_3(11,74 14074)$	$f'''(x) = -6x^2 + 48x - 6$ notw. Bed. $f''(x) = 0$ $0 = -2x^3 + 24x^2 - 6x$ mit GG: $x_1 = 0$ und $x_2 \approx 0,26$ und $x_3 \approx 11,74$ hinr. Bed. $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$ $f'''(0) = -6 < 0 \rightarrow W$ $f'''(0,26) \approx 6,1 > 0 \rightarrow W$ $f'''(11,74) \approx -269 < 0 \rightarrow W$ da $f(0) = 1$ folgt: $W_1(0 1)$ da $f(0,26) \approx 0,99$ folgt: $W_2(0,26 0,99)$ da $f(11,74) \approx 14074$ folgt: $W_3(11,74 14074)$

Beispiel 2 - Analysis

Die Funktion $h(t) = 0,6t^3 - 9t^2 + 400$ mit $0 \leq t \leq 15$ beschreibt die Flughöhe (in m) eines Ballons in Abhängigkeit der Zeit t (in Minuten) im angegebenen Zeitintervall.

a) OPERATOR die Flughöhe nach 3 Minuten.

b) OPERATOR die minimale Flughöhe des Ballons.

c) OPERATOR den Zeitpunkt, an dem sich die Flughöhe am stärksten ändert.

	Operatoren „ERMITTELN“ oder „BESTIMMEN“	Operatoren „Berechnen“ oder „rechnerisch Bestimmen“
a)	<p>Gesucht $h(3)$. Mittels graphischer Analyse ergibt sich $P(3 335,2)$.</p> <p>Nach 3 Minuten fliegt der Ballon in einer Höhe von ca. 335,2 Metern.</p>	<p>Gesucht $h(3)$. GG liefert $h(3) = 335,2$.</p> <p>Nach 3 Minuten fliegt der Ballon in einer Höhe von ca. 335,2 Metern.</p>
b)	<p>Gesucht ist das globale Minimalstelle der Funktion.</p> <p>Über eine graphische Analyse ergibt sich als lokaler Tiefpunkt $T(10 100)$. Die Betrachtung und Untersuchung des Graphen an den Rändern zeigt, dass die lokale Extremstelle auch die globale und damit gesuchte Stelle ist.</p> <p>Damit erreicht der Ballon nach 10 Minuten seine geringste Flughöhe.</p>	<p>Gesucht ist das globale Minimum der Funktion.</p> <p>Bestimmung der lokalen Extrempunkte: $h'(t) = 1,8t^2 - 18t$; $h''(t) = 3,6t - 18$ notw. Bed. $h'(t) = 0$ $0 = 1,8t^2 - 18t$ mit GG: $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ hinr. Bed. $h'(t) = 0 \wedge h''(t) \neq 0$ $h''(0) = -18 < 0 \rightarrow H$. Nicht gesucht $h''(10) = 18 > 0 \rightarrow T$</p> <p>Da für die Randwerte gilt: $h(0) = 400$ und $h(15) = 400$ ist der lokale Tiefpunkt auch der globale Tiefpunkt.</p> <p>Damit erreicht der Ballon nach 10 Minuten seine geringste Flughöhe.</p>
c)	<p>Gesucht ist die Wendestelle der Funktion und damit die Extremstelle von h'.</p> <p>Über eine graphische Analyse ergibt sich als lokaler Tiefpunkt von h' an: $T(5 -45)$. An dieser Stelle gilt also: $h'(5) = -45$.</p> <p>Da für die Randwerte gilt: $h'(0) = 0$ und $h'(15) = 135$ gilt:</p> <p>Nach 5min verringert sich die Flughöhe am stärksten und zwar mit -45m/min also $-0,75\text{ m/s}$.</p> <p>Die stärkste Zunahme liegt nach 15min vor, nämlich mit 135 m/min also $2,25\text{ m/s}$.</p>	<p>Gesucht ist die Wendestelle der Funktion.</p> <p>$h'(t) = 1,8t^2 - 18t$ und $h''(t) = 3,6t - 18$ und $h'''(t) = 3,6$ notw. Bed. $h''(t) = 0$ $0 = 3,6t - 18$ mit GG: $t=5$. hinr. Bed. $h''(x) = 0 \wedge h'''(x) \neq 0$ $h'''(5) = 3,6 > 0 \rightarrow W$</p> <p>Bestimmung der Steigungen an der Wendestelle und an den Rändern: $h'(5) = -45$; $h'(0) = 0$; $h'(15) = 135$. Also gilt: Nach 5min verringert sich die Flughöhe am stärksten und zwar mit -45m/min also $-0,75\text{ m/s}$.</p> <p>Die stärkste Zunahme liegt nach 15min vor, nämlich mit 135 m/min also $2,25\text{ m/s}$.</p>

Beispiel 3 - Analysis

OPERATOR Sie den Inhalt der Fläche zwischen x-Achse und dem Graphen der Funktion

$f(x) = x^2 + 1$ im Intervall $[1;3]$.

	Operatoren „ERMITTELN“ oder „BESTIMMEN“	Operatoren „Berechnen“ oder „rechnerisch Bestimmen“
	<p>Da f in $[1;3]$ nach graphischer Analyse keine Nullstelle besitzt und die Fläche oberhalb der x-Achse liegt, gilt:</p> $A = \int_1^3 (x^2 + 1) dx = \frac{32}{3} \text{ [FE]}$	<p>Da $f(x) = 0$ keine Lösung (in \mathbb{R}) besitzt und $f(1) = 2 > 0$ folgt:</p> $A = \int_1^3 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 + x \right]_1^3 = \frac{32}{3} \text{ [FE]}$ <p>Alternative: ... folgt: $F(x) = \frac{1}{3} x^3 + x$</p> $A = \int_1^3 (x^2 + 1) dx = F(3) - F(1) = \frac{32}{3} \text{ [FE]}$ <p>Hinweis: In jedem Fall muss die Stammfunktion angegeben und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewendet werden (eckige-Klammerschreibweise oder Differenz).</p>

Beispiel 4 - Analysis

Eine Schülerin verwendet die auf \mathbb{R} definierte Funktion h mit der Funktionsgleichung

$h(t) = -\frac{80}{27}t^3 + \frac{40}{3}t^2 + 130$ für $0 \leq t \leq 3,5$, um den Wasserstand in cm des Rheins an der Mess-

stelle in Bonn im Zeitraum vom 20.10.2016 0:00 Uhr bis 23.10.2016 12:00 Uhr zu modellieren.

OPERATOR Sie, wie lange der Wasserstand im betrachteten Zeitraum zwischen 140cm und 150cm lag.

	Operatoren „ERMITTELN“ oder „BESTIMMEN“	Operatoren „Berechnen“ oder „rechnerisch Bestimmen“
	<p>Am Graphen lässt sich ablesen, dass im betrachteten Bereich für ungefähr $0,98 \leq t \leq 1,5$ gilt: $140 \leq h(t) \leq 150$.</p> <p>Damit lag der Wasserstand im betrachteten Zeitraum insgesamt ca. 0,5 Stunden zwischen 140cm und 150cm.</p> <p>Alternative: Bestimmung der Stellen für $h(x)=140$ und $h(x)=150$, um dann unter Verweis auf den Graphen das Intervall direkt anzugeben.</p>	<p>Gesucht werden die Intervalle für $0 \leq t \leq 3,5$ mit $140 \leq h(t) \leq 150$.</p> <p>Für $h(x)=140$ liefert GG im gesuchten Intervall: $x \approx 0,98$</p> <p>Für $h(x)=150$ liefert GG im gesuchten Intervall: $x=1,5$.</p> <p>Mit $0 \leq t \leq 3,5$ und $h(0)=130$ sowie $h(1,2) \approx 144$ und $h(2) \approx 160$ ergibt sich: $140 \leq h(t) \leq 150$ gilt ungefähr für $0,98 \leq t \leq 1,5$.</p> <p>Damit lag der Wasserstand im betrachteten Zeitraum insgesamt ca. $1,5 - 0,98 = 0,52$ [Stunden] zwischen 140cm und 150cm.</p>